COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Sujet commun ENS : ULM et LYON) (M')

DURÉE : 6 heures

L'objet de ce problème est d'étudier des propriétés de certains espaces métriques, en relation avec des structures diverses liées par exemple à des formes quadratiques ou des groupes.

Les quatre parties sont indépendantes, sauf pour la question 3.1, dont la démonstration est analogue à celle de la question 2.5; le résultat peut évidemment être admis pour la suite.

Soit X une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on note δ la distance induite, cette notation sera utilisée dans tout le problème. De façon plus générale on considérera des espaces métriques X, c'est à dire des ensembles munis d'une application distance δ de $X \times X$ dans $\mathbf{R}^+$ telle que :

- $\delta(x,y) = 0$ est équivalent à $x = y$,
- $\delta(x,y) = \delta(y,x)$, pour tous $x, y \in X$,
- $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$, pour tous $x, y, z \in X$.

On rappelle que deux espaces X et Y sont homéomorphes s'il existe une bijection $f : X \to Y$ qui est continue et dont l'application réciproque est continue.

On dit qu'une application g de X dans lui-même laisse stable (ou stabilise) un sous-ensemble A si $g(A) \subset A$. Un point x tel que $g(x) = x$ sera dit fixe ou stable par g. On dit qu'un sous-groupe G du groupe des permutations de X laisse stable une partie A de X (resp. a x pour point fixe) si $g(A) \subset A$ (resp. $g(x) = x$) est vérifié pour tout $g \in G$.

Etant donné un corps commutatif $\mathbf{K}$, on notera $GL_n(\mathbf{K})$ le groupe des matrices inversibles (n,n) à coefficients dans $\mathbf{K}$. Si V est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$ on notera $GL(V)$ le groupe des automorphismes linéaires de V.

Une attention particulière sera portée à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Partie 1

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, le produit scalaire de deux vecteurs x et y sera noté par $(x|y)$, la norme euclidienne de x le sera par $||x||$. Sur l'espace vectoriel $E \times \mathbf{R}$ on considère la forme bilinéaire B définie par :

$$B((e,t),(e',t')) = -(e|e') + tt' \quad ,$$

où (e,t) et (e',t') sont des éléments de $E \times \mathbf{R}$; soit Q la forme quadratique associée à B. On considère également sur $E \times \mathbf{R}$ le produit scalaire standard donné par : $(e|e') + tt'$, la norme euclidienne associée sera aussi notée $||(e,t)||$, ou $||x||$ avec $x = (e,t)$.

1.1 Soit $\mathcal{H} = \{(e,t) \in E \times \mathbf{R} \ / \ t > 0,\ ||e||^2 + t^2 = 1,\ -||e||^2 + t^2 > 0\}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est homéomorphe à $\mathcal{B} = \{e \in E / ||e|| < 1\}$.

1.2 On rappelle que la fonction ch est définie par $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, et que Arg ch désigne la fonction réciproque, définie de $[1, +\infty[$ dans $\mathbf{R}^+$. Montrer que l'on peut définir sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ une fonction δ à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ par la formule suivante :

$$\delta(x,x') = \mathrm{Arg\,ch}\left(\frac{B(x,x')}{\sqrt{Q(x)Q(x')}}\right) \quad ,$$

où x et x' sont dans $\mathcal{H}$. On se ramènera à étudier les variations d'un trinôme du second degré correctement choisi. Vérifier que $\delta(x,x') = 0$ est équivalent à $x = x'$.

1.3.a Soient x, y, z des éléments de $\mathcal{H}$ deux à deux distincts, $a = \delta(y,z)$, $b = \delta(x,y)$, $c = \delta(x,z)$. Montrer qu'il existe un réel α tel que :

$$\mathrm{ch}a = \mathrm{ch}b\,\mathrm{ch}c - \mathrm{sh}b\,\mathrm{sh}c\cos\alpha \quad .$$

On rappelle que la fonction sh est définie par $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Pour ce faire on écrira y (resp. z) sous la forme $\frac{x+u}{||x+u||}$ (resp. $\frac{x+v}{||x+v||}$) avec $B(x,u) = 0$ et $Q(u) < 0$ (resp. $B(x,v) = 0$ et $Q(v) < 0$); puis pour démontrer l'existence de α on considérera le signe de la forme quadratique B restreinte au sous-espace orthogonal, pour la forme B, du sous-espace vectoriel engendré par x (*i.e* l'ensemble des vecteurs w tels que $B(x,w) = 0$).

En conclure que la fonction δ satisfait à l'inégalité triangulaire :

$$\delta(y,z) \leq \delta(y,x) + \delta(x,z) \quad ,$$

pour tous $x, y, z \in \mathcal{H}$, et donc que δ est une distance.

1.3.b Avec les mêmes notations en conclure que :

$$a^2 \geq b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad .$$

On écrira l'identité de 1.3.a sous la forme :

$$\mathrm{ch}a = (\frac{1-\cos\alpha}{2})\mathrm{ch}(b+c) + (\frac{1+\cos\alpha}{2})\mathrm{ch}(b-c) \quad ,$$

puis on utilisera la fonction réciproque de $\mathrm{ch}(\sqrt{x})$ et une inégalité de concavité.

1.4 Etant donnés deux points distincts x et y dans $\mathcal{H}$ démontrer qu'il existe un point l tel que $\delta(l,x) = \delta(l,y) = \frac{1}{2}\delta(x,y)$. Est il unique?

1.5 Soit X une partie fermée d'un espace vectoriel normé de dimension finie ou un espace métrique. On dira qu'il vérifie la condition *(MH)* si pour tout couple de points (x,y) de X il existe au moins un point $l \in X$ tel que pour tout $z \in X$ on ait :

$$(MH) \qquad \delta^2(x,z) + \delta^2(y,z) \geq 2\delta^2(l,z) + \frac{1}{2}\delta^2(x,y) \quad .$$

Montrer que $\mathcal{H}$ vérifie la condition (MH).

1.6 Vérifier que si X est un sous-ensemble convexe d'un espace euclidien, alors X vérifie la condition (MH). Donner des exemples d'espaces métriques connexes ne vérifiant pas la condition (MH).

Partie 2

Soit E un espace vectoriel réel normé de dimension finie, la norme sera notée $||\ ||$. Soit G un sous-groupe du groupe $GL(E)$ des automorphismes linéaires de E. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E étant muni d'une norme quelconque, également notée $||\ ||$, on considère la distance induite sur le groupe $GL(E)$ et on suppose que G est un sous-espace *compact* de $GL(E)$, un tel sous-groupe sera dit compact.

Etant donnés un sous-ensemble U de E et $s \in \mathbf{R}$, on notera $sU = \{sx,\ x \in U\}$.

Si A est un sous-ensemble de E et si $y \in E$ on notera $y + A = \{y + a / a \in A\}$.

2.1 Démontrer qu'il existe des réels positifs non nuls l et L tels que pour tout $x \in E$ et tout $g \in G$ on ait :

$$l||x|| \leq ||g(x)|| \leq L||x|| \quad .$$

2.2.a Par définition l'enveloppe convexe de $S \subset E$ est l'intersection des ensembles convexes le contenant. Montrer que c'est aussi l'ensemble des barycentres des familles de points de S affectés de coefficients positifs.

2.2.b Soit d la dimension de E. On considère n points $x_1, x_2, \ldots, x_n$, avec $n \geq d+2$. Montrer que l'on peut trouver des scalaires λ_i, $1 \leq i \leq n$, non tous nuls, tels que $\sum_1^n \lambda_i = 0$ et $\sum_1^n \lambda_i x_i = 0$.

2.2.c Montrer que, pour obtenir l'enveloppe convexe de S, il suffit de considérer les barycentres de familles de $d+1$ points de S, où d est la dimension de E. On raisonnera par récurrence descendante en montrant qu'un barycentre, à coefficients positifs, d'une famille de k points , $k > d+1$, est aussi barycentre, à coefficients positifs, d'une famille de $k-1$ points.

2.2.d Montrer que l'enveloppe convexe d'une partie compacte est compacte. On pourra utiliser 2.2.c.

2.3 Démontrer que, V étant un voisinage donné de 0, il existe un voisinage convexe U de 0 tel que, pour tout $g \in G$, $g(U) \subset V$. Puis montrer qu'il existe un voisinage W de 0, convexe, borné, et symétrique par rapport à 0 tel que, pour tout $g \in G$, $g(W) \subset W$. On pourra considérer une enveloppe convexe adéquate (*Remarque* : il n'est pas nécessaire d'utiliser 2.2.c et 2.2.d).

2.4 Soit K un sous-ensemble compact convexe non vide de E tel que pour tout $g \in G$ $g(K) \subset K$. On suppose que K contient deux points distincts. On va dans cette question, construire un sous-ensemble $H \subset K$ compact convexe tel que $H \neq K$ et $g(H) \subset H$ pour tout $g \in G$.

2.4.a Soit $K' = \{x - y / x, y \in K\}$; montrer l'existence d'un voisinage W de 0 comme en 2.3 et tel que :

- (i) $K' \subset (1+r)W$ si $r > 0$,
- (ii) K' n'est pas contenu dans $s\overline{W}$ si $s < 1$ ($\overline{W}$ désignant l'adhérence de W).

2.4.b On fixe r tel que $0 < r < 1$. Etablir que :

$$K_r = K \bigcap (\bigcap_{y \in K} (y + (1-r)\overline{W}) \quad ,$$

est compact convexe. Est il stable par G?

2.4.c Montrer que K est contenu dans une réunion finie d'ensembles $x_i + \frac{1}{2}W$, $i = 1, \ldots, n$, $x_i \in K$. Monter que pour $r = \frac{1}{4n}$, on a (avec les notations de 2.4.b) : $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \in K_r$. On pourra considérer les quantités $y - x_i$, $y \in K$. En conclure que $K_{\frac{1}{4n}}$ convient pour H.

2.5.a On conserve les notations de la question précédente. Montrer que l'entier n, introduit en 2.4.c, peut être majoré par une constante dépendant de dim$E$, de W et non de K.

2.5.b Soit $S \subset E$, on définit diam(S) par sup $\delta(x, y)$ pour x et y décrivant S. Montrer que l'on peut construire une suite H_n de sous-ensembles de K stables par G, tels que : $H_{n+1} \subset H_n$ pour tout n, et diam(H_n) tend vers zéro quand n tend vers l'infini. En conclure qu'il existe au moins un point de K fixe par G.

2.6 On considère l'espace vectoriel F des formes quadratiques sur E. Soient q une forme quadratique et $g \in G$, on définit une forme quadratique $g.q$ par $g.q(x) = q(g^{-1}(x))$. Montrer que ceci définit un homomorphisme de G dans $GL(F)$, on notera G' l'image de G par cet homomorphisme. Etant donnée une forme définie positive q_0 construire un ensemble *compact convexe*, contenant q_0, de formes définies positives stable par G'. En déduire qu'il existe une forme définie positive fixe par G'. Par abus de language on dira que q est stable par G. On utilisera 2.5.b.

2.7 Soit E euclidien de dimension n. Soit $O(E)$ le groupe des isométries de E. Montrer que tout sous-groupe compact de $GL(E)$ est contenu dans $fO(E)f^{-1}$ pour un certain automorphisme f de E. Le groupe $O(n)$ des matrices orthogonales (n, n) peut-il être contenu dans un sous-groupe compact du groupe $GL_n(\mathbf{R})$ distinct de lui-même?

Partie 3

Dans toute cette partie E désigne un espace vectoriel complexe de dimension n muni d'une norme quelconque, G un sous-groupe compact de $GL(E)$, *i.e* qui est *compact* en tant que sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.

Soit F l'espace vectoriel réel des formes hermitiennes sur E.

3.1 Soient q une forme hermitienne et $g \in G$, on définit une forme hermitienne $g.q$ par $g.q(x) = q(g^{-1}(x))$. Montrer que ceci définit un homomorphisme de G dans $GL(F)$, on

notera G' l'image de G par cet homomorphisme. En s'inspirant de 2.5 montrer qu'il existe une forme hermitienne définie positive fixe par G (au sens de 2.5).

3.2 Soit ϕ un homomorphisme, *continu en tant qu'application*, de G dans $GL(V)$ où V est un espace vectoriel complexe. Soit G' l'image de G. Comme plus haut, un sous-ensemble de V stable par G' sera dit stable par G.

3.2.a Soit H un sous-espace vectoriel de V stable par G. Montrer qu'il a un supplémentaire stable par G.

3.2.b En considérant $GL_2(\mathbf{C})$, ou un de ses sous-groupes. Montrer que la condition de compacité est nécessaire en 3.2.a.

3.2.c Un sous-espace W stable par G est dit irréductible s'il ne contient pas de sous-espaces stables par G distincts de W et de $\{0\}$. Montrer que V peut s'écrire comme somme directe de sous-espaces stables irréductibles.

3.3.a Soit u un élément de $GL_n(\mathbf{C})$ contenu dans un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il a toutes ses valeurs propres de module 1 et qu'il est diagonalisable.

3.3.b Soit $\mathbf{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1. Montrer que l'on peut trouver un élément v dans $\mathbf{U}$ tel que l'adhérence de l'ensemble $\{v^k / \ k \in \mathbf{Z}\}$ soit égal à $\mathbf{U}$. Il pourra être commode de considérer l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{U}$ donnée par $t \mapsto e^{2\pi i t}$.

3.3.c On appelle représentation de dimension m de G la donnée d'un espace vectoriel complexe V de dimension m et d'un homomorphisme, continu en tant qu'application, de G dans $GL(V)$. La représentation sera dite irréductible si V ne contient pas de sous-espaces stables par G distincts de V et de $\{0\}$.

Démontrer que toute représentation irréductible de $\mathbf{U}$ est de dimension 1, les décrire toutes. On commencera par considérer les sous-espaces propres d'un élément comme décrit en 3.3.b puis on utilisera un argument de continuité.

3.4.a Montrer que l'on peut trouver un élément v dans $\mathbf{U}^n = \mathbf{U} \times \ldots \times \mathbf{U}$ (produit n fois) tel que l'adhérence de l'ensemble $\{v^k / \ k \in \mathbf{Z}\}$ soit égal à $\mathbf{U}^n$. On pourra raisonner par récurrence sur n en considérant la projection de $\mathbf{U}^n$ sur le premier facteur et le noyau de cet homomorphisme.

3.4.b Montrer que toutes les représentations irréductibles de $\mathbf{U}^n$ sont de dimension 1. On les décrira.

Partie 4

On considère, dans cette partie un espace vectoriel euclidien E de dimension n. La distance induite est toujours notée δ. Etant donnés un point $x \in E$ et une partie A de E on définit $\delta(x, A)$ par inf $\delta(x, y)$ pour y décrivant A. Etant donnés une partie K et un réel $\varrho \geq 0$ on définit K_ϱ par $\{x \in E / \delta(x, K) < \varrho\}$.

Etant donnés deux sous-ensembles A et B, on notera l'ensemble des points de A qui ne sont pas dans B par $A \setminus B$.

La notation $B(a, r)$ désignera la boule fermée de centre a de rayon r, la notation $S(a, r)$ sa frontière (on omettra éventuellement le centre et le rayon dans la notation).

A partir de la question 4.4 on pourra considérer d'abord le cas où E est de dimension 2, puis indiquer brièvement les modifications à apporter pour traiter le cas général.

Enfin si H est un hyperplan affine de E, on note σ_H la symétrie orthogonale associée.

4.1 Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des sous-ensembles compacts de E. On définit une fonction $d : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbf{R}^+$ par $d(K, L) = \inf\{\varrho \geq 0 \,/ L \subset K_\varrho \text{ et } K \subset L_\varrho\}$. Démontrer que d est une distance sur $\mathcal{K}$.

4.2 L'ensemble des parties finies de E est il dense dans $\mathcal{K}$?

4.3.a Montrer que l'espace $\mathcal{K}$ est complet. On considérera une suite de Cauchy K_n, $n \in \mathbf{N}$, puis la suite des adhérences $G_n = \overline{\cup_{l \geq n} K_l}$, enfin l'intersection $\cap_n G_n$.

4.3.b Soit S un espace métrique borné. On rappelle que $\text{diam}(S) = \sup \delta(x, y)$ pour x et y décrivant S. Montrer que si S est compact cette borne supérieure est atteinte.

4.3.c On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des compacts contenus dans une boule fermée $B(a, r)$. Etant donné $\varepsilon > 0$, montrer que l'on peut recouvrir $\mathcal{M}$ par un nombre fini de parties de $\mathcal{K}$ de diamètre au plus ε. En conclure avec 4.3.a que $\mathcal{M}$ est compact.

4.4. On considère désormais un sous-espace compact K de E et H un hyperplan affine (droite affine si la dimension de E est 2). On définit $K' = St_H(K)$ comme suit :

soit D une droite affine orthogonale à H, alors

- (i) $D \cap K' = \emptyset$ si et seulement si $D \cap K = \emptyset$,
- (ii) si $D \cap K \neq \emptyset$, $K' \cap D$ est l'intervalle fermé de milieu $D \cap H$, de longueur égale à celle de $K \cap D$.

Montrer que $St_H(K)$ est symétrique par rapport à l'hyperplan H. Puis que le volume de K est le même que celui de $St_H(K)$, enfin que $\text{diam}(K) \geq \text{diam}(St_H(K))$.

4.5 Soient B une boule de frontière S, H un hyperplan passant par son centre, K un compact contenu dans B. Etablir que :

$$St_H(K) \cap ((S - K) \cup (\sigma_H(S - K)) = \emptyset \quad .$$

4.6 On considère maintenant un sous-ensemble $\mathcal{L}$, non vide, de $\mathcal{K}$. On suppose que pour tout hyperplan H passant par l'origine et tout $L \in \mathcal{L}$, $St_H(L) \in \mathcal{L}$. On suppose de plus que $\mathcal{L}$ est fermé pour la distance d. On va montrer que $\mathcal{L}$ contient une boule fermée de centre 0.

4.6.a Soit $r = \inf s$, $s \geq 0$, tel qu'il existe $L \in \mathcal{L}$ tel que $L \subset B(0, s)$. Montrer qu'il existe $F \in \mathcal{L}$ tel que $F \subset B(0, r)$ et que $S(0, r) \subset F$. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser 4.5.

4.6.b Avec les notations de 4.6.a démontrer que $B(0, r) \subset F$, conclure.